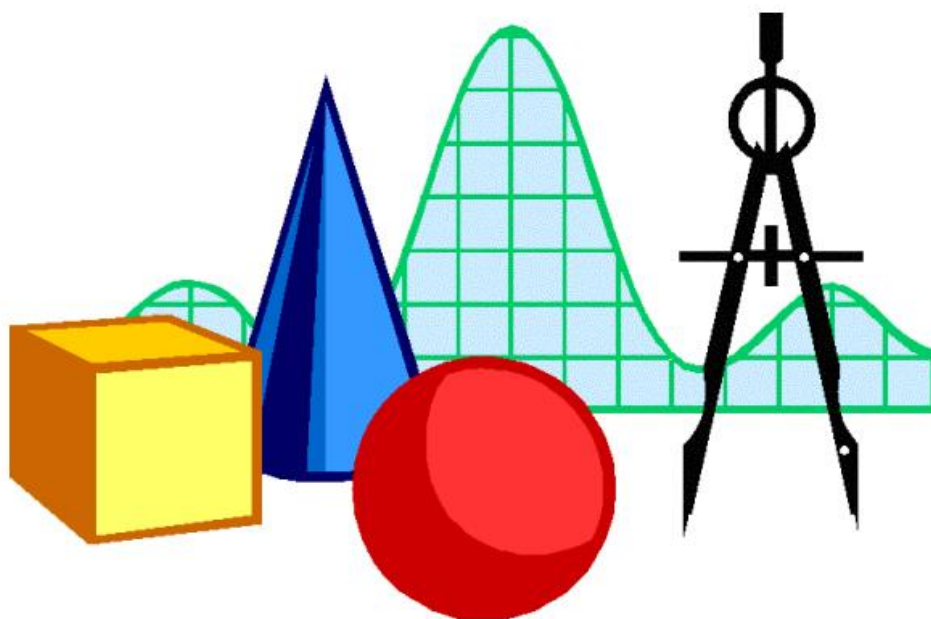


КУРС ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

для студентов 2 курса
специальности 34.02.01 «Сестринское дело»



Рассмотрено на заседании ЦМК гуманитарных и общеобразовательных дисциплин

Протокол № ____ от _____ 20 ____ г.

Председатель ЦМК _____ Назирова Д.Т.

Преподаватель: _____ Податнова С.М.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математика — один из важнейших предметов в учебных заведениях. Она приобретает особое значение в связи с необычайным ростом науки, технического прогресса в нашей стране.

Без математики жизнь невозможна. В любой профессии, отрасли — какие ни возьми, везде нужна математика. Математика — это наука прошлого и будущего, она необходима всем как инструмент для познания мира, для создания новых открытий, создания современных технологий.

Математика развивает у человека логическое мышление, целеустремлённость, воображение, умение мыслить и находить выход из любых ситуаций. Она заставляет думать, помогает человечеству открывать и использовать законы природы и в наше время является могучим двигателем науки и техники. Не каждый может стать математиком, но математика в жизни нужна будет каждому.

Математика является образовательной учебной дисциплиной, которая обеспечивает общеобразовательный уровень подготовки студентов медицинского колледжа.

На II курсе на базе 9 классов специальности 34.02.01 «Сестринское дело» студенты продолжают изучение учебной дисциплины «Математика». Данная дисциплина предполагает получение, как теоретических знаний, так и практических умений и навыков.

Теоретическая часть курса математики усваивается студентами в ходе лекционных занятий и во время самостоятельной внеаудиторной работе.

Необходимость разработки данного пособия обусловлена тем, что студенты I, II курсов не всегда успевают подробно записывать текст лекции со слов преподавателя, который ограничен аудиторным временем занятия. В пособии каждая тема изучаемого материала раскрыта более полно, с соответствующими разъяснениями и примерами.

В пособии удалось вместить весь курс по дисциплине «Математика» для студентов II курса на базе 9 классов, поэтому у студентов отпадает необходимость пользоваться большим количеством учебников, чтобы усвоить изучаемую тему.

В конце каждой лекции имеются контрольные вопросы, позволяющие студенту выполнить самооценку степени успеваемости теоретического материала.

Лекция № 1. Тема: «Функция. Предел функции»

I. ФУНКЦИЯ

1. Понятие числовой функции

Пусть задано числовое множество X . Правило, сопоставляющее каждому числу x из множества X единственное действительное число y , называют *числовой функцией*, заданной на множестве X .

x - независимая переменная (аргумент);

y - зависимая переменная (функция).

Символическая запись функции имеет вид $y = f(x)$

Множество X называется *областью определения функции* y и обозначается $D(y)$. $E(y)$ - *область (множество) значений функции* y – множество всех значений переменной y , которые она принимает при всех допустимых значениях x .

Способы задания функций:

- аналитический,
- табличный;
- графический;
- словесный.

2. Четность функции

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 1).

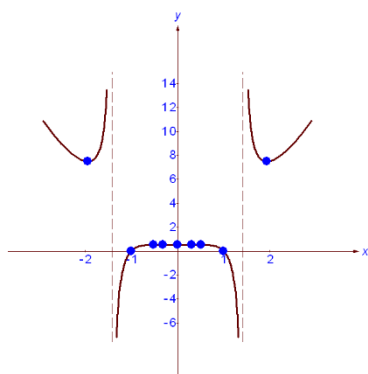


Рис. 1. График четной функции

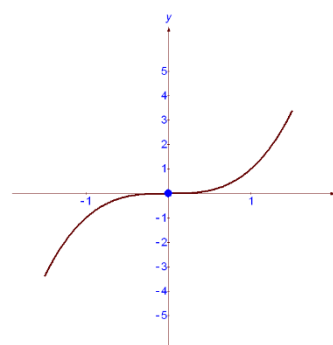


Рис. 2. График нечетной функции

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2).

При построении графиков четных и нечетных функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси oy для четной функции и косо-симметрично (т. е. симметрично относительно начала координат) для нечетной.

3. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если при всех значениях x из области её определения выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Наименьший положительный период функции называется её *основным периодом*.

Сумма, разность, произведение и частное двух функций, имеющих период T , обладает тем же периодом.

4. Нули функции

Нулем функции называется такое действительное значение x , при котором значение функции равно нулю.

Для того чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$, и наоборот. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее.

II. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие предела функции

Число A называется *пределом функции* в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

3. Теоремы о пределах

1) Если предел функции в точке x_0 существует, то он единственный.

2) Предел постоянной равен этой постоянной $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$

3) Предел суммы двух функций равен сумме пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

4) Предел произведения двух функций равен произведению их пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

6) Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций,

если предел знаменателя отличен от нуля $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

III. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции при $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Теорема: Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , тогда и только тогда, когда функция имеет конечные пределы в точке x_0 и предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции.

Для элементарных функций справедливы следующие положения:

1) область непрерывности элементарной функции совпадает с её областью определения, т.е. элементарная функция непрерывна во всей области определения;

2) элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках;

3) элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется *непрерывной в промежутке* (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Вопросы к лекции №1:

1. Что такое функция?
2. Что такое область определения и область значений функции??
3. Какие способы задания функции вам известны?
4. Какая функция называется четной, нечетной, периодической?
5. Что называется нулем функции и как его найти?
6. Что такое предел функции?
7. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Лекция № 2. Тема: «Производная функции.

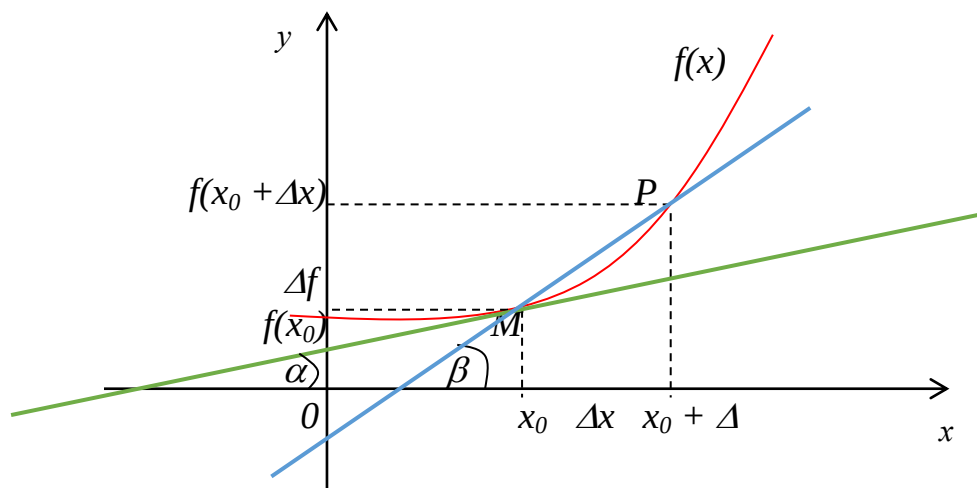
Дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям»

I. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей МР к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Фактически производная функции показывает скорость изменения функции, т.е. как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t – время, а $f(t)$ – закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции – скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.*

Процедуру нахождения производной функции называют дифференцированием, а функцию, имеющую производную в точке x_0 , называют дифференцируемой в этой точке.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$12) (\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$15) (\operatorname{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$16) (\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \Delta x$, т.е. $f'(x) \Delta x$ - главная часть приращения Δy .

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

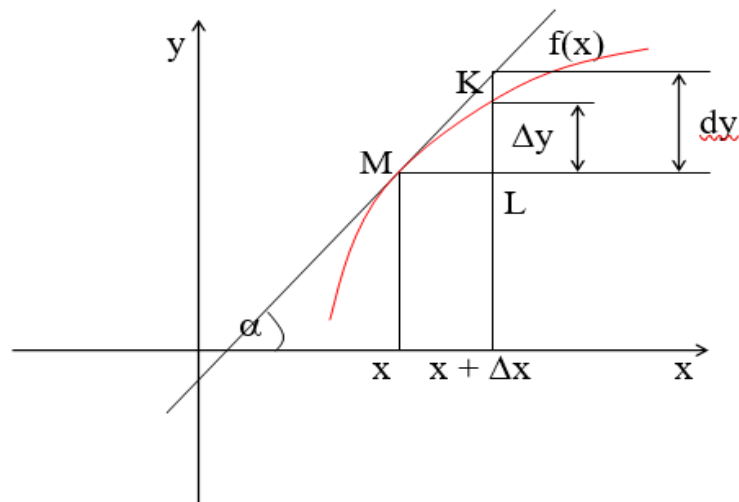
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x) \Delta x$ или

$$dy = f'(x) dx = y' dx$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$$1) \quad d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$$

$$2) \quad d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = vdu + u dv$$

$$3) \quad d(Cu) = Cdu$$

$$4) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x.$$

Вопросы к лекции №2:

1. Что такое производная функции?
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. В чем состоит физический смысл производной?
4. Каковы основные правила дифференцирования?
5. Перечислите несколько производных элементарных функций?

Лекция № 3. Тема: «Неопределенный интеграл»

I. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

$$\text{Записывают: } \int f(x)dx = F(x) + C;$$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C : $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. Интеграл алгебраической суммы функций равен сумме интегралов от каждой из них: $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x .

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла: $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$

Таблица интегралов.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int n dx = nx + C$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

II. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования. Данный метод заключается в преобразовании подынтегрального выражения к виду, представляющему собой линейные комбинации табличных интегралов.

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x) dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$ получается:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными

выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

$$\begin{aligned} \text{Пример. } \int x^2 \sin x dx &= \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = u' dx = 2x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \\ &= \left. \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Интегрирование рациональных функций.

Рациональной функцией называется дробь вида: $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m}$,

где n, m - степени соответствующих многочленов.

Если $m > n$, то дробь правильная; если $m \leq n$, дробь неправильная.

При интегрировании неправильных дробей предварительно следует перейти к правильной дроби путем выделения целой части. В дальнейшем дробь необходимо представить в виде суммы более простых дробей.

Пример. Найти $\int \frac{x^3}{x^2 + 2} dx$.

Подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь, поэтому необходимо выделить целую часть.

$$\frac{x^3}{x^2 + 2} = \frac{x^3 + 2x - 2x}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2) - 2x}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 2} - \frac{2x}{x^2 + 2} = x - \frac{2x}{x^2 + 2}.$$

Найдем интеграл данного выражения:

$$\int \left(x - \frac{2x}{x^2 + 2} \right) dx = \int x dx - \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \int \frac{x}{x^2 + 2} dx$$

Сделаем замену $t = x^2 + 2, dt = 2x dx, dx = \frac{dt}{2x}$, тогда

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 2} = \int \frac{x \frac{dt}{2x}}{t} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2|.$$

Получим: $\int \left(x - \frac{2x}{x^2 + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| = \frac{x^2}{2} - \ln|x^2 + 2| + C.$

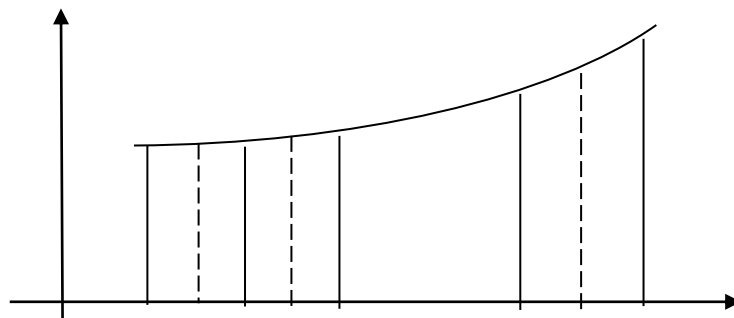
Вопросы к лекции №3:

1. Что такое неопределенный интеграл?
2. Что такое первообразная функции?
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла?
4. Назовите некоторые интегралы элементарных функций?

Лекция № 4. Тема: «Определенный интеграл. Применение определенного интеграла.»

I. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие определенного интеграла удобно рассматривать на решении задачи о вычислении площади криволинейной трапеции.



Для нахождения площади фигуры, ограниченной с двух сторон перпендикулярами, восстановленными в точках a и b , сверху непрерывной кривой $y=f(x)$ и снизу осью Ox , разобьем отрезок $[a, b]$ на небольшие отрезки:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

Восстановим перпендикуляры из этих точек до пересечения с кривой $y=f(x)$. Тогда площадь всей фигуры будет примерно равна сумме элементарных прямоугольников, имеющих основание, равное $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а высоту, равную значению функции $f(x)$ внутри каждого прямоугольника. Чем меньше величина Δx_i , тем точнее будет определяться площадь фигуры. Следовательно $S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$.

Если существует предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек c_i , то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Т.о., геометрический смысл определенного интеграла связан с определением площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху функцией $y=f(x)$, снизу осью Ox , а по бокам - перпендикулярами, восстановленными в точках a и b .

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx;$$

2. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Если переставить пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на

противоположный $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

4. Определенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

5. Отрезок интегрирования можно разбивать на части $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования

Пример: Найти $\int_{-1}^3 (x^2 + 2x - 3) dx$

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 2x - 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^3 = \left(\frac{3^3}{3} + \frac{1}{3} \right) + (3^2 + 1) - (3 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = 5 \frac{1}{3}$$

Замена переменных.

Пример: Найти $\int_1^2 (3x - 1)^3 dx$

$$\int_1^2 (3x - 1)^3 dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 1 \\ du = 3dx \\ dx = \frac{du}{3} \\ u_b = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ u_a = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \end{array} \right| = \int_2^5 u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_2^5 u^3 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^4}{4} \Big|_2^5 = \frac{1}{12} u^4 \Big|_2^5 = \frac{1}{12} \cdot (5^4 - 2^4) = 50,75$$

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример: Найти $\int_1^2 x \ln x dx$

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x dx \\ du = (\ln x)' = \frac{dx}{x} \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2^2}{2} \cdot \ln 2 - \frac{1^2}{2} \cdot \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 =$$

$$2 \ln 2 - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

III. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл применяют для вычисления площади плоской фигуры, вычисления длины дуги плоской кривой и вычисления объема тела вращения.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b f(x) dx$.

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, то длина дуги этой кривой находится по формуле: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Вопросы к лекции №4:

1. Что такое определенный интеграл?
2. В чем отличие определенного и неопределенного интегралов?
3. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
4. В чем заключаются методы интегрирования?

Лекция № 5. Тема: «Дифференциальные уравнения.»

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Равенство, связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y=f(x)$, а также ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

В обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестной является функция одной переменной.

$F(x, y, y', y'' \dots) = 0$ – общий вид дифференциальных уравнений, где F -известная функция, заданная в некоторой фиксированной области, x - независимая переменная, y - зависимая переменная, т.е. x и подлежащая определению.

y', y'' -производные

Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшим порядком производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y=f(x)$, которая будучи подставленная в $F(x, y, y', y'' \dots) = 0$, обращает его в тождество, т.е. левая и правая части должны быть равны.

График такой функции - интегральная прямая.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, называется *уравнение с разделяющимися переменными*, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной.

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(y)dy = 0$$

После разделения переменных, когда каждый член будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится по членным интегрированиям

$$\frac{f_1(x)}{\gamma_1(x)} dx + \frac{f_2(y)}{\gamma_2(y)} dy = 0$$

$$\int \frac{f_1(x)}{\gamma_1(x)} dx + \int \frac{f_2(y)}{\gamma_2(y)} dy$$

Общее решение будет иметь вид:

$$F(x) + \varphi(y) = 0$$

Пример: Найдите решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2) \mid \cdot \frac{dx}{1 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{1 + y^2} = x \cdot (1 + y^2) \cdot \frac{dx}{1 + y^2}$$

$$\frac{dx}{1+y^2} = xdx$$

$$\int \frac{dx}{1+y^2} = \int xdx$$

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$tg(\arctg y) = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

Пример: Найти решение уравнения

$$y' = 2x + 1, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)dx$$

$$\int dy = \int (2x + 1)dx$$

$$y = \int 2xdx + \int dx + C$$

$$y = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$y = x^2 + x + C$$

III. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение вида $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные функции $y' = \frac{dy}{dx}$, называются *линейными дифференциальными уравнениями первого порядка*.

При $q(x)=0$ уравнение называется *линейным однородным уравнением* $y' + p(x) \cdot y = 0$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и его решение будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y \quad | \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{y} = -p(x) \cdot y \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx$$

$$\ln y = - \int p(x)dx + \ln C$$

$$e^{\ln y} = e^{-\int p(x)dx + \ln C}$$

$$e^{\ln y} = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{\ln C}$$

$$y = C * e^{-\int p(x)dx}$$

Если $q(x) \neq 0$, то уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Общее решение линейного неоднородного дифференциального имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot (C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx)$$

Пример: Найти общее решение уравнения

$$y' + y \cdot 2 \cos x = 0$$

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

Решение имеет вид: $y = C * e^{-\int p(x)dx}$

$$p(x) = 2 \cos x$$

$$\int 2 \cos x dx = 2 \int \cos x dx = 2 \sin x$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$y = C * e^{-2 \sin x}$$

Пример: Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3x, \text{ при } x = 1 \text{ и } y = 1$$

Общее решение имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 3x$$

Общее решение:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot (C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx)$$

Тогда

$$\int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\ln x} = x$$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot (C + \int 3x \cdot x dx)$$

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot (C + x^3) \quad - \text{общее решение}$$

$$1 = \frac{1}{1} \cdot (C + 1^3)$$

$$1 = 1(C + 1)$$

$$1 = C + 1$$

$$C = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot (1 + x^3) = x^2$$

$$y = x^2 \quad - \text{частное решение}$$

Вопросы к лекции №5:

1. Какие уравнения называются дифференциальными?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Перечислите методы решения некоторых дифференциальных уравнений.
4. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?
5. Какие дифференциальные уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка?

Лекция № 6. Тема: «Основные понятия дискретной математики.

Основы теории вероятностей.»

I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Математическая логика - раздел математики, который занимается исследованием высказывания, с точки зрения их формами строения. Под высказыванием понимается некоторая фраза, высказанное словами или высказанное суждение.

Высказывание - это повествовательное предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л.

Значения И и Л (или 1 и 0) называются *истинностными значениями* высказывания.

Операции над высказываниями

Условимся считать высказывание *элементарным (простым)*, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание. Для образования *составных (сложных) высказываний* используют *логические связки (логические операции)*.

К основным логическим операциям над высказыванием относится: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция.

Пусть X и Y – два высказывания.

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно тогда и только тогда, когда X ложно.

X	$\neg X (\overline{X})$
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$ « X и Y », которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

X	Y	$X \wedge Y$ ($X \& Y$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$ « X или Y », которое ложно тогда и только тогда, когда X и Y ложны.

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \rightarrow Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X – истинно, а Y – ложно. В разговорной речи импликация высказываний соответствует составлению высказывания вида: « X имплицитует Y », «из X следует Y », «если X , то Y », « X достаточно для Y », « X только тогда, когда Y », « Y необходимо для X », « Y тогда, когда X ». В обозначении $X \rightarrow Y$ X – посылка, Y – заключение.

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинные значения высказываний X и Y совпадают. В разговорной речи эквиваленция двух высказываний соответствует составлению нового высказывания вида « X эквивалентно Y », « X тогда и только тогда, когда Y », « X необходимо и достаточно для Y ».

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

II. КОМБИНАТОРИКА. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ.

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и размещение этих элементов в каком-либо порядке.

Перестановкой из n -элементов называется каждая последовательность этих элементов, в каком-либо порядке.

$$P_n = n!$$

Размещение из n -элементов, по k в каждом, называется последовательность, каждая из которых содержит k -элементов, взятых из числа данных n -элементов, и которое отличается друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетание из n -элементов по k называются любые последовательности из k -элементов, входящих в число данных (n)элементов и отличающихся друг от друга, хотя бы 1 элементом.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

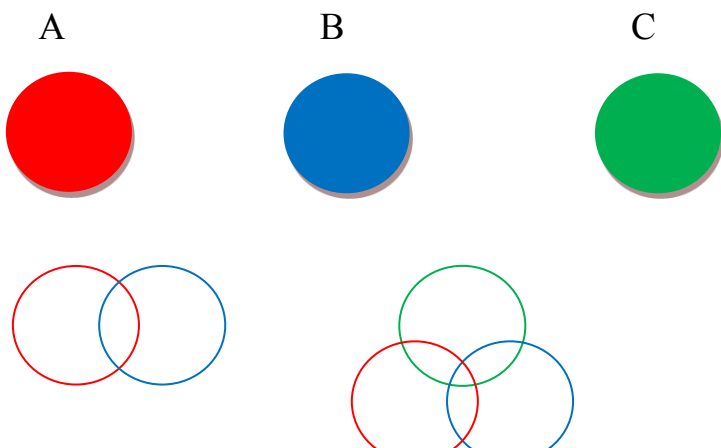
Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерности массовых случайных событий. Случайными называются события, поступление которых нельзя гарантировать.

Испытанием называется совокупность условий, при котором может произойти данное случайное событие.

Событие - факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет.

Операциями над событиями могут служить: операция суммы, произведения, разности.

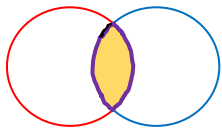
Суммой нескольких событий – события, состоящие в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.



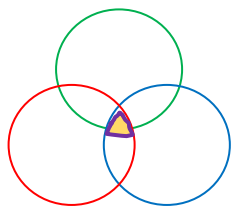
$A+B$

$A+B+C$

Произведение нескольких событий, называется событие, которое состоит совместно с поступлением всех этих событий в результате испытания.

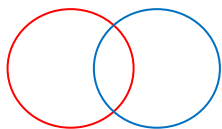


Произведение ($A*B$)

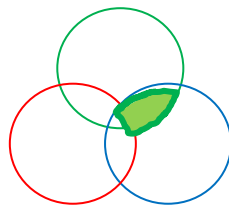


Произведение ($A*B*C$)

Разность двух событий, называется событие, состоящее из исходов, входящих в первое событие, но не входящих во второе.



$A-B$



$A-B-C$

События называются *несовместными*, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются *совместными*, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

Событие A называется *независимым* от события B , если вероятность осуществления события A не зависит от того произошло событие B , или нет.

Событие A называется *зависимым* от события B , если его вероятность меняется в зависимости от того, произошло событие B , или нет.

Вероятность события - число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении испытаний.

Вероятностью событий A называется отношение числа, благоприятствующих исходов m к общему числу равновозможных несовместимых исходов n .

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Теоремы сложения вероятности

1) Вероятность сложения двух несовместимых событий а и b = сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)= P(A)+P(B)$$

2) Вероятность хотя бы одного из двух совместимых событий равно сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместимого наступления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B)$$

Теоремы умножений вероятностей

1) Вероятность произведений двух независимых событий равно произведению вероятностей этих событий.

$$P(A*B)= P(A)* P(B)$$

2) Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равно произведению одного из них на условную вероятность двух вычисленных при условии, что первое событие осуществилось

$$P (A*B)=P(A)*P(B/A)$$

Под понятием условий вероятности понимается вероятность события А при условии, что событие В произошло.

IV. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, за грани неизвестно меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений, т.е. такое множество элементов, которого можно посчитать.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале.

Распределением случайной величины называется всякое сочетание между возможными значениями случайных величин и соответствующие им случайной вероятности.

К числовым характеристикам случайной величины относятся: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отношение.

Математические ожидания характеризуют положение случайной величины, на числовой оси определяя некоторые средние значения, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математические ожидания дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных ее значений соответствующей вероятности.

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_n p_n$$

Дисперсией случайной величины, называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е. дисперсия математического ожидания равна. Математические ожидания квадрата отклонения случайной величины, от ее математического ожидания называют дисперсией случайной величины.

$$D(x) = M(x - M(x))^2$$

Разность дисперсии равна квадрату случайной величины и ее неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее принять корень квадратной из дисперсии - *среднее квадратичное отклонение*.

$$\delta(x) = \sqrt{D(x)}$$

Вопросы к лекции №6:

1. Какой раздел математики называется математической логикой?
2. Что называется высказыванием? Перечислите операции над высказываниями.
3. Какой раздел математики называется комбинаторикой?
4. Что такое перестановки?
5. Что такое сочетания?
6. Что такое случайное событие?
7. Какой раздел математики называется теорией вероятности?
8. Что такое испытание?
9. Что такое вероятность?

Лекция №7. Тема: «Математическая статистика и её роль в медицине и здравоохранении. Медико-демографические показатели.»

I. МЕДИЦИНСКАЯ СТАТИСТИКА

Математическая статистика является основой применения количественных методов анализа в различных сферах человеческой деятельности. В зависимости от объекта исследования имеются различные направления применения методов математической статистики.

Большое внимание уделяется применению статистических методов для обработки медико-биологических данных. Этими вопросами занимается медицинская статистика.

Медицинская статистика - отрасль социальной статистики, которая изучает количественные характеристики состояния здоровья населения, развития системы здравоохранения, определяет степень интенсивности влияния на них социально-экономических факторов, а также занимается приложением статистических методов к обработке и анализу результатов клинических и лабораторных исследований.

Медицинская статистика оценивает показатели здоровья населения, здравоохранения, состояния окружающей среды для определения её безопасности и влияния на здоровье человека.

В медицинской статистике выделяют следующие разделы: *статистику здоровья населения*, изучающую санитарно-демографические процессы, динамику заболеваемости, физического развития, и *статистику здравоохранения*, изучающую деятельность медико-санитарных учреждений и медицинских кадров.

Источниками информации, позволяющими оценить основные показатели, являются: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; лабораторные и клинические обследования.

Этапы медико-статистического исследования

Любое медико-статистическое исследование состоит из следующих этапов:

1. Определение цели и задач исследования исходя из рабочей гипотезы или предположения, составление и программы исследования.
2. Организация и проведение сбора необходимых данных, группировка полученных материалов.
3. Статистическая обработка данных.
4. Анализ полученных результатов, выводы.

Первый этап является основным, так как правильный выбор цели определяет весь ход дальнейшего исследования.

Целью большинства медико-биологических исследований является выявление влияния различных контролируемых факторов на здоровье человека. Под контролируемым фактором понимаются различные внутренние или внешние причины, которые влияют на показатели здоровья населения и могут быть измерены в результате проводимого исследования.

Задачи исследования конкретизируют вопросы, решение которых приведет к достижению поставленной цели.

План исследования определяет решение организационных вопросов проведения исследования. Основные из них: определение объема исследования, места и сроков проведения, выбор и обучение исполнителей, техническое и методическое обеспечение исследований, компьютерное и программное обеспечение автоматизации сбора и обработки данных.

Программа исследований предусматривает выбор единиц наблюдения, составление программы сбора, выбора математических методов обработки и анализа данных.

Под **объемом наблюдения** понимается совокупность единиц наблюдений или предметов, которые необходимо изучить. Это то, что в математической статистике называется **статистической совокупностью**. Элементы, входящие в статистическую совокупность, называют **единицей наблюдения**.

Второй этап исследования заключается в организации и проведении сбора необходимого материала исследования. По способу сбора возможны следующие варианты получения первичной информации об обследуемом объекте: непосредственное получение данных, выкопировка информации из отчетно-учетной документации и опрос населения.

На **третьем этапе** исследования производится обработка полученных данных, которая включает последовательное выполнение следующих операций: контроль собранных данных, шифровка, группировка, сводка данных в статистические таблицы, статистическая обработка материала

На **четвертом этапе** медико-статистического исследования проводится анализ полученных результатов и делаются выводы или предложения по улучшению тех или иных показателей. Анализ результатов заключается в сравнении полученных данных с нормативными или стандартными показателями или в оценке динамики полученных значений.

II. АНАЛИЗ МЕДИКО-ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Демография (от греч. demos - народ, grafo - писать, изобразить) - наука о народонаселении. Демографические показатели являются важнейшими критериями оценки здоровья населения.

Демографическая статистика изучает численность, состав, плотность населения, механическое (миграция) и естественное движение населения и их влияние на состояние здоровья и здравоохранение.

Демографическая статистика подразделяется на статику и динамику населения. **Статика населения** - раздел медицинской демографии, изучающий численный состав населения, структуру населения по полу, возрасту, уровню образования, национальности, семейному положению и т. д. Основной медико-демографический показатель статистики – **численность** населения.

Важной медико-демографической характеристикой является возрастная структура населения, которая показывает распределение населения по возрастным группам. Все население страны делится на 3 возрастные группы: от 0 до 14 лет, от 15 до 49 лет, от 50 лет и старше. В зависимости от соотношения численности этих групп различают прогрессивный, регрессивный и стационарный типы населения.

Прогрессивным считается тип населения, в котором количество детей (0-14 лет) превышает контингент населения в возрасте от 50 лет и старше. **Регрессивным** считается тип населения, в котором количество населения в возрасте от 50 лет и старше превышает количество детей. **Стационарным** считается тип населения, в котором количество детей (0-14 лет) равно количеству населения в возрасте от 50 лет и старше.

Половая структура населения - распределение населения по полу.

Динамика населения изучает естественное, механическое (миграция) и социальное движения населения. **Естественное движение** определяется изменением численности, состава и размещения населения, обусловленное рождаемостью, смертностью, браками и разводами.

Рождаемость населения является важнейшим показателем воспроизводства населения. Для оценки рождаемости определяется либо абсолютный показатель рождаемости, либо относительный общий показатель рождаемости, который определяется по формуле:

$$\text{Общий показатель рождаемости} = \frac{\text{общее число родившихся за год}}{\text{среднегодовая численность населения}} \times 1000$$

Среднегодовая численность населения рассчитывается как полу сумма численности населения на начало и конец календарного года.

Для оценки воспроизводства населения страны важную роль играет показатель смертности. **Смертность населения** - процесс естественного сокращения численности людей за счёт случаев смерти.

Общий показатель смертности определяется по формуле:

$$\text{Общий показатель смертности} = \frac{\text{общее число умерших за год}}{\text{среднегодовая численность населения}} \times 1000$$

Разница между общими показателями рождаемости и смертности населения за год отражает процесс воспроизводства населения. Этот показатель называется **естественный прирост** населения. Основным источником получения информации о численности и составе населения являются регулярно проводимые **переписи населения**.

Вопросы к лекции №7:

1. Какая отрасль социальной статистики называется медицинской?
2. Какие разделы существуют в медицинской статистике?
3. Перечислите основные этапы медико-статистического исследования.
4. Что такое демография?

Лекция №8. Тема: «Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского работника.»

I. ПРОЦЕНТ. ПРОПОРЦИЯ

При выполнении своих профессиональных обязанностей медицинским работникам часто приходится производить различные математические вычисления. И от правильности проведенных расчетов зависит здоровье, а иногда и жизнь пациентов.

Определение процента. Составление и решение пропорций

Процентом называется сотая часть величины.

Для краткости вместо слова «процент» после числа ставится знак %

Чтобы найти процентное выражение числа, его нужно умножить на сто.

Чтобы найти число по его процентному выражению, нужно разделить процентное выражение на 100

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся **задачи на нахождение процентов**.

1. Чтобы найти указанный процент данного числа, необходимо число умножить на значение процента и разделить на 100

2. Чтобы найти исходное число по указанному проценту, необходимо данное число разделить на значение процента и умножить на 100

3. Чтобы найти выражение одного числа в процентах другого, необходимо- первое число разделить на второе и умножить на 100

Два равных отношения образуют пропорцию, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

где a и d — крайние члены; b и c — средние члены пропорции.

Произведение средних членов пропорции равно произведению крайних членов пропорции, т.е. $a \cdot d = c \cdot b$.

Этим свойством пользуются для вычисления неизвестного члена пропорции, когда три остальных члена известны.

II. РАСЧЕТ ПРОЦЕНТНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРОВ

Раствором называется гомогенная (то есть однородная) система, состоящая из двух и более компонентов, относительные количества которых могут меняться. В состав растворов входят растворитель и растворенные вещества. Обычно растворителем считают тот компонент, который в чистом виде имеет то же агрегатное состояние, что и полученный раствор. Чаще всего в качестве растворителя выступает вода и наибольшее значение имеют водные растворы.

Состав раствора может быть охарактеризован количественно. В химии существует много способов выражения концентрации растворов. Один из них *процентная концентрация* — *отношение массы растворенного вещества к массе раствора и умноженное на 100*:

$$C = \frac{m_{\text{в-ва}}}{m_{\text{р-ра}}} \cdot 100\%$$

Приготовление менее концентрированного раствора связано с добавлением растворителя, при этом концентрация растворенного вещества не меняется.

III. ЖИЗНЕННАЯ ЕМКОСТЬ ЛЕГКИХ

Объем воздуха в легких и дыхательных путях зависит от конституционально-антропологических и возрастных характеристик человека, свойств легочной ткани, поверхностного натяжения альвеол, а также силы, развиваемой дыхательными мыш-

цами.

При спокойном вдохе и выдохе через легкие проходит сравнительно небольшой объем воздуха. Это **дыхательный объем (ДО)**, который у взрослого человека составляет примерно 500 мл. При этом акт вдоха проходит несколько быстрее, чем акт выдоха. Обычно за 1 минуту совершается 12-16 дыхательных циклов. Такой тип дыхания обычно называется "эйпноэ", или "хорошее дыхание".

При форсированном (глубоком) вдохе человек может дополнительно вдохнуть еще определенный объем воздуха. Этот **резервный объем вдоха (РО_{вд})** — максимальный объем воздуха, который способен вдохнуть человек после спокойного вдоха. Величина резервного объема вдоха составляет у взрослого человека примерно 1,8-2,0 л.

После спокойного выдоха человек может при форсированном выдохе дополнительно выдохнуть еще определенный объем воздуха. Это **резервный объем выдоха (РО_{выд})**, величина которого составляет в среднем 1,2-1,4 л.

Объем воздуха, который остается в легких после максимального выдоха и в легких мертвого человека, — **остаточный объем легких (ОО)**. Величина остаточного объема составляет 1,2-1,5 л. Различают следующие емкости легких:

1. **Общая емкость легких (ОЕЛ)** — объем воздуха, находящегося в легких после максимального вдоха — все четыре объема.

2. **Жизненная емкость легких (ЖЕЛ)** включает в себя дыхательный объем, резервный объем вдоха, резервный объем выдоха. **ЖЕЛ** — это объем воздуха, выдохнутого из легких после максимального вдоха при максимальном выдохе.

$$\underline{\underline{ЖЕЛ = ДО + РО_{вд} + РО_{выд} .}}$$

3. **Емкость вдоха (Евд)** равна сумме дыхательного объема и резервного объема вдоха:

$$\underline{\underline{Евд = ДО + РО_{вд} .}}$$

4. **Функциональная остаточная емкость (ФОЕ)** — объем воздуха в легких после спокойного выдоха.

$$\underline{\underline{ФОЕ = РО_{выд} + ОО .}}$$

Величина легочной вентиляции определяется глубиной дыхания и частотой дыхательных движений. Количественной характеристикой легочной вентиляции служит **минутный объем дыхания (МОД)** — объем воздуха, проходящий через легкие за 1 минуту. В покое частота дыхательных движений человека составляет примерно 16 в 1

минуту, а объем выдыхаемого воздуха — около 500 мл. Тогда:

$$\underline{МОД = ДО \cdot ЧД},$$

где ЧД — частота дыхания в минут.

МОД — объем воздуха, который проходит через легкие за 1 минуту во время максимальных по частоте и глубине дыхательных движений. Максимальная вентиляция возникает во время интенсивной работы, при недостатке содержания O_2 (гипоксия) и избытке CO_2 (гиперкапния) во вдыхаемом воздухе. В этих условиях МОД может достигать 150-200л в 1 минуту.

Воздух, находящийся в воздухоносных путях, не участвует в газообмене, и поэтому пространство воздухоносных путей называют вредным, или мертвым пространством {МП}. Во время спокойного вдоха объемом 500 мл в альвеолы поступает только 350 мл вдыхаемого атмосферного воздуха. Остальные 150 мл задерживаются в анатомическом мертвом пространстве. Часть дыхательного объема, которая участвует в газообмене с легочной кровью, называется дыхательным альвеолярным объемом.

$$\underline{ДАО = ДО - МП}.$$

Тогда минутная альвеолярная вентиляция легких:

$$\underline{МВЛ = (ДО - МП) \cdot ЧД}$$

Показатели сердечной деятельности

Под сердечным выбросом понимают количество крови, выбрасываемой сердцем в сосуды в единицу времени. В клинической литературе используют понятия: минутный объем кровообращения (МОК) и систолический, или ударный, объем крови.

Минутный объем кровообращения характеризует общее количество крови, перекачиваемое правым или левым отделом сердца в течение одной минуты в сердечно-сосудистой системе.

Факторами, определяющими величину МОК, являются систолический объем крови, частота сердечных сокращений и венозный возврат крови.

Систолический объем крови — это объем, нагнетаемый каждым желудочком в магистральный сосуд (аорту или легочную артерию) при одном сокращении сердца.

Основным показателем, характеризующим систолическую функцию сердца, является величина сердечного выброса. Сердечный выброс (или минутный объем крови — МО) — это количество крови, выбрасываемой желудочком в минуту. Сердечный выброс рассчитывается следующим образом:

$$\underline{МО = УО \cdot ЧСС},$$

где МО - минутный объем крови (сердечный выброс); УО - ударный объем; ЧСС - частота сердечных сокращений.

Помимо величины сердечного выброса рассчитывают:

1. Ударный объем (УО) - количество крови, выбрасываемой желудочком в магистральный сосуд при каждом сокращении:

$$УО = \frac{МО(л/мин)}{ЧСС(уд/мин)}, \text{ или } \underline{УО = КДО - КСО},$$

где КДО - конечно-диастолический, а КСО - конечно-систолический объемы желудка;

2. Фракцию выброса (ФВ) - отношение УО к конечно-диастолическому объему желудочка (в %):

$$ФВ = \frac{УО \cdot 100\%}{КДО}, \text{ или } ФВ = \frac{(КДО - КСО) \cdot 100\%}{КДО}.$$

Фракция выброса (ФВ) - важнейший интегральный показатель систолической функции сердца, указывающий, какая часть конечно-диастолического объема крови (КДО) выбрасывается из желудочков во время их систолы;

3. Сердечный индекс (СИ), который представляет собой отношение МО крови к площади поверхности тела ($S, м^2$). СИ вычисляют по формуле:

$$СИ = \frac{МО}{S} (л/мин \cdot м^2).$$

При этом площадь поверхности тела (S) рассчитывают по специальной формуле;

4. Ударный индекс (УИ) - отношение ударного объема к площади поверхности тела ($S, м^2$). УИ вычисляют по формуле:

$$УИ = \frac{УО}{S} (л/м^2).$$

Вопросы к лекции №8:

1. Что называется процентом?
2. Как найти процентное выражение числа?
3. Как найти число по его процентному выражению?
4. Что называется пропорцией?
5. Сформулируйте основное свойство пропорции.
6. Что называется процентной концентрацией раствора?

Список использованной литературы Основная: 1. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Григорьев В. П., Дубинский Ю.А. – 4-е издание – М.: Издательский центр «Академия», 2008 г. 2. "Теория вероятностей и математическая статистика". Гмурман В.Е. М., "Высшая школа", 2008. 3. "Высшая математика в упражнениях и задачах". Учебное пособие в 2-х частях. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. М., "Высшая школа", 2008. 4. Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления».М., «Физматгиз», 2008. Дополнительная: 1. Колде Я.К. "Практикум по теории вероятностей и математической статистике". М., "Высшая школа", 1991. 2. Матвеева Н.М. "Курс математики для техникумов", ч. 1 и 2. М., "Наука", 1987. 3. Яковлев Г.Н. "Алгебра и начала анализа", ч. 1 и 2. М., "Наука", 1988.